MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 18.02.2012

Barem
Clasa a 10-a

Problema 1 :

Oficiu..**1p**

Ridică la cub şi obţine relaţia $4=a^3+3a^2b\sqrt{c}+3ab^2c+b^3c\sqrt{c}$ ……………………**1p**

Scrie relaţia în forma $4-a^3-3ab^2c=b\left(3a^2+b^2c\right)\sqrt{c}$ ………………………………**1p**

Obţine sistemul $\begin{cases} a^3+3ab^2c=4 \\ b\left(3a^2+b^2c\right)=0 \end{cases}$ ……………………………………………………**1p**

Cazul I: $b=0 \Rightarrow a^3=4$, deci $a=\sqrt[3]{4}\in Q$, absurd…………………………………**2p**

Cazul II: $3a^2+b^2c=0 \Rightarrow a=c=0$,deci $\sqrt[3]{4}=0$, absurd………………………...…**3p**

Finalizare…………………………………………………………………………**1p**

Problema 2 :

Oficiu..**1p**

Cazul I: Dacă $f(1)=3$, atunci $1+3<2+f(2) \Rightarrow f(2)>2$. Deci $f(2)=3$, contradicţie cu faptul ca funcţia este injectivă……………………………………………………………**2p**

Cazul II: Dacă $f(1)=2$, atunci $1+2<2+f(2) \Rightarrow f(2)>1$. Deci $f(2)\geq 2$. Cum funcţia este injectivă avem că $f(2)=3$. Atunci $2+3<3+f(3) \Rightarrow f(3)>2$,ceea ce implică $f(3)=3$ contradicţie cu faptul că funcţia este injectivă…………………………………………………**3p**

Cazul III: Dacă $f(1)=1$, atunci $\{f(2);f(3)\}=\{2;3\}$. Pentru $f(2)=3$ avem $f(3)=3$, contradicţie. Deci $f(1)=1$, $f(2)=2$ si $f(3)=3$ ……………………………..………**3p**

Finalizare……………………………………………………………………………1p

Problema 3 :

Oficiu..1p

a) Demonstrează că $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$……………………………………………………1p

Demonstrează că $\frac{3}{2} < \log_2 3$……………………………..……………………..….2p

Finalizare…………………………………………………………………….….…1p

b) Scrie identitatea

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc), \forall a,b,c \in R$ ……….……..1p

$$\left(\frac{1}{\log_a x}\right)^3 + \left(\frac{1}{\log_b x}\right)^3 + \left(\frac{1}{\log_c x}\right)^3 - \frac{3}{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x} =$$

Atunci:

$$= \left(\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}\right)\left[\left(\frac{1}{\log_a x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\log_b x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\log_c x}\right)^2 - \frac{1}{\log_a x} \cdot \frac{1}{\log_b x} - \frac{1}{\log_a x} \cdot \frac{1}{\log_c x} - \frac{1}{\log_b x} \cdot \frac{1}{\log_c x}\right]$$

……………………………………………………………………………………….1p

Observă că: $\left(\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}\right) = \log_x(abc) = \log_x 1 = 0$ ………………………..…2p

Finalizare………………………………………………………………….……1p

Problema 4 :

Oficiu..1p

Demonstrează inegalitatea $|1 - z| \leq 2$ ……………………….…………….……..2p

Observă că din $z^n = 1, z \neq 1$ rezultă $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$ ……………………...….1p

Scrie relaţia $(z-1)(z^{n-2} + 2z^{n-3} + 3z^{n-4} + ... + n - 1) = -n$ 2p

Prin trecere la modul obţine: $|z-1|=\dfrac{n}{\left|z^{n-2}+2z^{n-3}+...+n-1\right|}$ ……………………….……**1p**

Dar $\left|z^{n-2}+2z^{n-3}+...+n-1\right|\le|z|^{n-2}+2|z|^{n-3}+...+n-1=1+2+...+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ …..**2p**

Finalizare…………………………………………......…………………………......…………..**1p**